5

Box 15

Beräkning
af
Planeten Panopeas
Banelementer.

Akademisk Afhandling,

som,

med vidtberömda Philosophiska Facultetens i Lund
tillstånd
för erhållande af Philosophiska graden

till offentlig granskning framställes

af

NILS CHRISTOFFER DUNÉR,
Philos. Cand., e. o. Amanuens, Skån.,

på Auditorium N:o 1, Lördagen den 24 Maj 1862,
kl. 10 f. m.

Lund,
tryckt uti Berlingska Boktryckeriet,
1862.

1.

Året 1861 var ovanligt rikt på planetupptäckter. Till de redan kända tillkommo nemligen ej mindre än 10 nya planeter *), alla tillhörande den mellan Jupiters och Mars' banor belägna, sannolikt mycket talrika asteroidgruppen. De flesta af dessa småplaneter upptäcktes under månaderna Mars, April och Maj och åtskilliga af dem blefvo derföre, dels tillfölje af dåligt väder, dels tillfölje af deras egen ljussvaghet, de ljusa sommarnätterna och den utomordentliga stjernrikedomen i de himlatrakter, der de för tillfället befunno sig, högeligen ofullständigt observerade. Det är alltså tydligt att det behöfves en möjligast noggrann beräkning af de få observationer, som förefinnas, på det att de ej i likhet med asteroiden Daphne må gå förlorade. Då jag derföre till föremål för denna afhandling tagit en banbestämning, som ännu ej blifvit med noggrannhet verkställd och som, tillfölje af den myckna tid, beräkningen af det alltjemt vexande antalet småplaneter och andra astronomiska arbeten ta i anspråk, ej tyckes skola bli utförd af någon annan, synes valet af ämne berättigadt.

2.

Planeten Panopea, den 70:de af asteroiderna, upptäcktes af Goldschmidt i Fontenay aux Roses nära Paris den 5:te Maj 1861. Den hade då lika ljusstyrka med en stjerna af 10 . 11 storleken och visade en stark retrograd rörelse. Den 5:te Juni

*) Nemligen: 63 Ausonia, 64 Angelina, 65 (Cybele), 66 Maja, 67 Asia, 68 Leto, 69 Hesperia, 70 Panopea, 71 Niobe och 72; se Astron. Nachr. N:o 1295, 1299, 1300, 1308, 1309, 1310, 1313, 1323 och 1353.

hade den nedsjunkit till 11 storleken och med den 13:de Juni upphöra alla mig bekanta observationer. Jag sammanställer här samteliga observationer jag kunnat finna, anmärkande att de alla äro differensobservationer, hvadan således planetens ort är bestämd genom den skillnad i ascensio recta och declination som vid observationstiden egde rum mellan planeten och en närbelägen, antingen förut bestämd eller sedan observerad fixstjerna. I Berlin ha dessa differenser blifvit observerade med filarmikrometer, uti Bilk och Fontenay deremot med ringmikrometer, tillfölje hvaraf de förra ega en större noggrannhet än Bilkerobservationerna och isynnerhet än observationerna i Fontenay, hvilka såsom anställda med ett för litet instrument måste vid banbestämningen uteslutas. Jag anför dem dock för att, sedan elementerna blifvit funna, dermed jemföra dem.

Observationer på Panopea år 1861 *).

Observationsortens Medeltid		α	δ	*Observationsort*
Maj	$5^d,4$	$220^\circ55'45''$	$-14^\circ20'$	Paris (Grafiskt)
„	$10^d10^h44^m$	$219^\circ37'30''$	$-14^\circ21'54''$	Paris
„	$11^d11^h45^m$	$219^\circ21'15''$	$-14^\circ23'$	Paris
„	$15^d13^h\ 9^m38^s,6$	$218^\circ18'15'',20$	$-14^\circ27'\ 8'',5$	Bilk (4 jemförelser)
„	$17^d13^h51^m\ 5^s$	$217^\circ47'47'',25$	$-14^\circ29'26'',2$	Berlin
„	$18^d10^h37^m$	$217^\circ34'38'',4$	$-14^\circ30'56''$	Paris
„	$26^d10^h34^m\ 7^s,6$	$215^\circ46'\ 5'',80$	$-14^\circ42'\ 4'',5$	Bilk (10 jemförelser)
Juni	$5^d11^h58^m42^s$	$214^\circ\ 1'\ 4'',20$	$-15^\circ\ 3'\ 6'',5$	Berlin
„	$12^d11^h\ 2^m51^s,9$	$213^\circ13'21'',60$	$-15^\circ23'10'',4$	Bilk (2 jemförelser)
„	$13^d11^h10^m52^s,7$	$213^\circ\ 8'34'',30$	$-15^\circ26'12'',7$	Bilk (5 jemförelser).

*) Astron. Nachr. N:o 1310, 1311, 1315, 1327.

3.

För att nu ur alla de noggrannare observationerna härleda elementerna, beslöt jag att först jemföra dem med de redan beräknade elementerna och derur bilda normalorter. Som till följe af observationernas ringa antal dessa normalorter blott kunde bli tre, syntes mig den annars vanligen använda methoden, enligt hvilken man utvecklar de conditionsæquationer, genom hvars lösning elementernas correctioner finnas, för detta fall ej böra tagas i anspråk. Den Gaussiska methoden att ur trenne observationer beräkna en planets elementer borde vara fullkomligt tillräcklig. Jag utgick således från följande af Förster beräknade elementer *).

$$\begin{aligned} \text{Epoch} &= 1861 \text{ Juni } 0{,}0 \\ M &= 314^{0}8'36'',5 \\ \left.\begin{aligned} \pi &= 299^{0}3'\ 0'',2 \\ \Omega &= 48^{0}21'\ 0'',3 \\ i &= 11^{0}14'37'',1 \end{aligned}\right\} &\ \text{Epochens medelæquinoctium} \\ \varphi &= 12^{0}55'\ 2'',4 \\ \mu &= 813'',222 \end{aligned}$$

Ur dessa härledde jag de differentialcoefficienter, medelst hvilka elementerna kunde hänföras till en annan ecliptica och ett annat medelæquinoctium och fann följande elementsystem.

$$\begin{aligned} \text{Epoch} &= 1861 \text{ Juni } 0{,}0 \\ M &= 314^{0}\ 8'36'',5 \\ \omega &= 250^{0}41'59'',9 + \ \ 2'',0640 \ (t' - 1861 \text{ Juni } 0{,}0) \\ \Omega &= 48^{0}21'\ 0'',3 + 48'',2157 \ (t' - 1861 \text{ Juni } 0{,}0) \\ i &= 11^{0}14'37'',1 + \ \ 0'',27644 \ (t' - 1861 \text{ Juni } 0{,}0) \\ \varphi &= 12^{0}55'\ 2'',4 \\ \mu &= 813'',222 \end{aligned}$$

Med detta elementsystem beräknade jag för den 10 och 30 Maj och 19 Juni banans æquatorsconstanter, hänförda till apparenta

---

*) Astron. Nachr. N:o 1316.

æquinoctiet för dessa dagar, *) och, sedan jag genom interpolation funnit dessa quantiteter för hvar fjerde af de mellanliggande dagarna, planetens geocentriska orter **), hvadan jag erhöll en för hvar fjerde dag gällande ephemerid. Genom att interpolera i midten, erhölls en ephemerid för hvarannan dag och slutligen, genom att äfven här interpolera i midten, följande för hvarje Berlinermiddag gällande ephemerid.

Berl. Med.-tid	α	δ	log. Δ
Maj 14,0	218°42′ 2″,19	— 14°25′32″,28	0,14074
15,0	218 26 36, 84	— 14 26 34, 23	0,14084
16,0	218 11 21, 60	— 14 27 38, 60	0,14102
17,0	217 56 17, 48	— 14 28 45, 57	0,14128
18,0	217 41 25, 80	— 14 29 55, 37	0,14161
19,0	217 26 47, 43	— 14 31 8, 16	0,14202
20,0	217 12 22, 87	— 14 32 24, 07	0,14250
21,0	216 58 13, 13	— 14 33 43, 25	0,14306
22,0	216 44 19, 04	— 14 35 5, 98	0,14369
23,0	216 30 41, 45	— 14 36 32, 41	0,14439
24,0	216 17 22, 09	— 14 38 2, 56	0,14517
25,0	216 4 21, 60	— 14 39 36, 59	0,14603
26,0	215 51 40, 83	— 14 41 14, 69	0,14693
27,0	215 39 20, 44	— 14 42 57, 01	0,14791
28,0	215 27 20, 82	— 14 44 43, 76	0,14895
29,0	215 15 42, 70	— 14 46 35, 09	0,15006
30,0	215 4 26, 86	— 14 48 31, 15	0,15123
31,0	214 53 33, 91	— 14 50 32, 06	0,15246
Juni 1,0	214 43 4, 49	— 14 52 38, 01	0,15375
2,0	214 32 59, 13	— 14 54 49, 11	0,15510
3,0	214 23 18, 60	— 14 57 5, 49	0,15650
4,0	214 14 3, 33	— 14 59 27, 25	0,15796
5,0	214 5 13, 84	— 15 1 54, 53	0,15947
6,0	213 56 50, 55	— 15 4 27, 42	0,16103
7,0	213 48 53, 89	— 15 7 6, 00	0,16263
8,0	213 41 24, 18	— 15 9 50, 29	0,16428
9,0	213 34 22, 05	— 15 12 40, 55	0,16598

*) Gauss Theoria Motus Corporum Coelestium Lib. I Sect. II Artt. 55 och 53, i hvilken senare formlerna egentligen äro utvecklade för ecliptican, men tydligen gälla för æquatorn, om i st. f. de till ecliptican hänförda quantiteterna de till æquatorn hänförda införas.

**) Theor. Motus Lib. I Sect II Art. 60 om hvilka formler samma anmärkning gäller som i föregående not.

Berl. Med.-tid	α	δ	log. Δ
10,0	213°27′47″,61	—15°15′36″,82	0,16772
11,0	213 21 41, 36	—15 18 39, 10	0,16950
12,0	213 16 3, 20	—15 21 47, 47	0,17132
13,0	213 10 53, 50	—15 25 1, 97	0,17318
14,0	213 6 12, 26	—15 28 22, 68	0,17507
15,0	213 1 59, 72	—15 31 49, 66	0,17700
16,0	212 58 15, 76	—15 35 22, 92	0,17897

4.

Med denna ephemerid jemfördes nu observationerna på följande sätt. Den aberrationstid, som motsvarade hvarje observationsmoment, bestämdes först och subtraherades från den motsvarande observationstiden och för den sålunda från aberration befriade tiden söktes planetens orter genom interpolation. Parallaxerna beräknades på vanligt sätt *) och lades till dessa orter, hvarefter de observerade ascensionerna och declinationerna drogos derifrån. Jag erhöll derigenom följande skillnader mellan beräkning och observation, vid sidan af hvilka jag anför de antagna vigtsquadraterna för hvarje observation.

Berl. Med. tid	*dα Cos δ*	*dδ*	*vv*
Maj 15ᵈ,558870	— 8″,71	— 6″,80	0,4
17ᵈ,569235	+ 3″,72	— 4″,07	1,0
Maj 26ᵈ,450755	— 0″,71	— 1″,36	1,0
Juni 5ᵈ,490843	+ 1″,81	— 7″,42	1,0
Juni 12ᵈ,470240	+13″,99	—12″,81	0,2
13ᵈ,475769	+ 3″,88	—28″,96	0,5

Ur denna jemförelse har jag genom att taga differenserna mellan räkning och observation så tillsamman, som de genom strecken äro indelade, erhållit följande normalafvikelser **).

---

*) Brünnow Lehrb. der Sphär. Astr. p. 100.

**) Jfr. Theor. Mot. Lib. II Sect. III Art. 173.

Berl. Med. tid	$d\alpha \operatorname{Cos} \delta$	$d\delta$
Maj 16^d,994845	$-0'',12$	$-\ 4'',81$
Maj 31^d,470799	$+0'',55$	$-\ 4'',49$
Juni 13^d,107761	$+6'',77$	$-24'',29$

Ur dessa normalafvikelser bildades följande

Normalorter.

Berl. Med. tid	α	δ
Maj 17^d,0	$217^0 56' 17'',60$	$-14^0 28' 40'',76$
Maj 31^d,5	$214^0 48' 15'',71$	$-14^0 51' 30'',01$
Juni 13^d,0	$213^0 10' 46'',47$	$-15^0 24' 37'',68$

5.

Innan jag öfvergår till sjelfva banbestämningen, anser jag det ej vara ur vägen att i största korthet redogöra för den methode att ur trenne fullständiga observationer beräkna en planets bana, hvilken, först framställd af Gauss i det vigtiga arbetet "Theoria Motus Corporum Coelestium," med flera förbättringar af Encke finnes såsom ett tillägg i "Berliner Jahrbuch für 1854."

Som i denna method observationsorten antages belägen i eclipticans plan, och som å ena sidan, till följe af störningarna genom de öfriga planeterna, ej ens jordens medelpunkt uppfyller detta vilkor och å andra sidan, när banelementerna äro helt och hållet obekanta, man ej kan hänföra observationerna dit, så införes i stället den punkt, hvari den genom planeten och observationsorten dragna linien skär eclipticans plan, och hvarest tydligen planetens längd och bredd äro desamma som i observationsorten. Denna punkts longitud och afstånd från solen bestämmes ur planetens och solens longituder α^0 och $\odot^0$ samt latituder β^0 och σ^0, jordens radius vector R^0, solens æquatorealhorizontalparallax p^0, observationsortens afstånd från jordens medelpunkt δ^0 och den ur observationsortens geocentriska latitud φ och stjerntiden ϑ vid observationstillfället härledda longituden l^0 och latituden b^0 för observationsortens zenith medelst följande formler:

$$L = 180^0 + \odot^0 - (\text{Præcession} + \text{Nutation})$$

$$- \frac{\sigma^0 - p' \operatorname{Sin} b^0}{tg\,\beta^0} \operatorname{Sin}(\alpha^0 - \odot^0) - p' \operatorname{Cos} b^0 \operatorname{Sin}(l^0 - \odot^0)$$

$$\lg R = \lg R^0 - \left\{ \frac{\sigma^0 - p' \operatorname{Sin} b^0}{tg\,\beta^0} \operatorname{Cos}(\alpha^0 - \odot^0) + p' \operatorname{Cos} b^0 \operatorname{Cos}(l^0 - \odot^0) \right\} M^0$$

hvarest M^0 betecknar modulen för det Briggska logarithmsystemet multiplicerad med Sin $1''$, och $p' R^0 = \delta^0 p^0$.

Vidare måste planetens orter corrigeras för fixstjernaberration och hänföras till samma æquinoctium som jordens längder. Dessa sålunda erhållna longituder och latituder betecknas med α, α', α'', β, β', β''.

6.

Man öfvergår härefter till de öfriga förberedande räkningarna. Betecknas observationstiderna med t, t', t'' och den Gaussiska constanten *) med k så beräknar man

$$\tau = (t'' - t')\,k, \qquad \tau' = (t'' - t)\,k, \qquad \tau''\,(t' - t)\,k \quad \text{samt}$$

$$N = \frac{R' R'' \operatorname{Sin}(L'' - L')}{R R'' \operatorname{Sin}(L'' - L)} \qquad N'' = \frac{R R' \operatorname{Sin}(L' - L)}{R R'' \operatorname{Sin}(L'' - L)}$$

Betydelsen af N och N'' är sjelfklar. Täljarne äro 2 ggr de triangelareor som omslutas af tvenne närgränsande radii vectores och de chordor som förbinda deras ändpunkter, och den gemensamma nämnaren är 2 ggr den af de båda yttersta radii vectores på samma sätt uppkomna triangelarean.

Vidare beräknar man för den mellersta observationstiden lutningen mot ecliptican af det plan, som lägges genom jordens radius vector och den linie, som förbinder jorden med planeten, hvilken lutning i motsats mot hvad vanligen sker räknas från 0^0 till 360^0, samt bestämmer den yttre vinkeln vid jorden i triangeln mellan jorden, solen och planeten. Man finner

---

*) Theor. Mot. Lib. I Sect. I. Art. 1.

$$tg\,w' = \frac{tg\,\beta'}{\mathrm{Sin}\,(\alpha' - L')}$$

$$tg\,\delta' = \frac{tg\,(\alpha' - L')}{\mathrm{Cos}\,w'}.$$

Hvad de quadranter beträffar, i hvilka dessa vinklar skola tagas, inses lätt, att, när planetens bredd är nordlig, faller w' inom första eller andra och, när den är sydlig, inom tredje eller fjerde quadranterna, samt att den före oppositionen faller inom första eller fjerde samt efter densamma inom andra eller tredje quadranterna. Tecknet för dess cosinus är således bestämdt genom dessa båda vilkor. δ' kan tydligen ej öfverstiga 180^0 och är således utan tvetydighet bestämd genom tecknet för sin tangent.

Man lägger nu genom de båda yttersta planetorterna en storcirkel och bestämmer längden för dess uppstigande nod samt dess lutning mot ecliptican medelst æquationerna

$$\mathrm{Sin}\,(\tfrac{1}{2}\,(\alpha'' + \alpha) - K)\,tg\,J = \frac{\mathrm{Sin}\,(\beta'' + \beta)}{2\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta''}\,\mathrm{Sec}\,\tfrac{1}{2}\,(\alpha'' - \alpha)$$

$$\mathrm{Cos}\,(\tfrac{1}{2}\,(\alpha'' + \alpha) - K)\,tg\,J = \frac{\mathrm{Sin}\,(\beta'' - \beta)}{2\,\mathrm{Cos}\,\beta\,\mathrm{Cos}\,\beta''}\,\mathrm{Cosec}\,\tfrac{1}{2}\,(\alpha'' - \alpha)$$

hvarest J är positiv och mindre än 90^0.

Lägges genom den mellersta planetorten en mot ecliptican vinkelrät storcirkel och man med β^0 utmärker latituden för den punkt, hvari denna storcirkel skär den, som blifvit lagd genom de båda yttersta, så erhålles

$$tg\,\beta^0 = \mathrm{Sin}\,(\alpha' - K)\,tg\,J.$$

7.

Efter dessa förberedande räkningar införes det vilkor, som i den första Keplerska lagen uttalas, nemligen att de tre planetorterna skola ligga i ett genom solen gående plan.

Betecknas planetens heliocentriska coordinater med x, y, z, x', y', z', x'', y'' och z'' samt man med n och n'' betecknar samma qvantiteter uti planetbanan som i jordens bana beteck-

nades med N och N'', så bli de æquationer, som uttrycka detta vilkor: *)

$$nx - x' + n''x'' = 0$$
$$ny - y' + n''y'' = 0$$
$$nz - z' + n''z'' = 0$$

Dessa æquationer äro i sjelfva verket identiska och upphöra först att vara det när n och n'' uttryckas i function af mellantiderna.

I stället för coordinaterna sjelfva inför man deras i följande æquationer uttryckta värden

$$x = \varrho \operatorname{Cos} \alpha + R \operatorname{Cos} L, \qquad x' = \varrho' \operatorname{Cos} \alpha' + R' \operatorname{Cos} L',$$
$$y = \varrho \operatorname{Sin} \alpha + R \operatorname{Sin} L, \qquad y' = \varrho' \operatorname{Sin} \alpha' + R' \operatorname{Sin} L',$$
$$z = \varrho\, tg\, \beta, \qquad z' = \varrho'\, tg\, \beta'$$

$$x'' = \varrho'' \operatorname{Cos} \alpha'' + R'' \operatorname{Cos} L'',$$
$$y'' = \varrho'' \operatorname{Sin} \alpha'' + R'' \operatorname{Sin} L'',$$
$$z'' = \varrho''\, tg\, \beta'',$$

hvarest ϱ, ϱ' och ϱ'' beteckna planetens *distantiæ curtatæ*. Härigenom öfvergå våra æquationer till

$$0 = n(\varrho \operatorname{Cos} \alpha + R \operatorname{Cos} L) - (\varrho' \operatorname{Cos} \alpha' + R' \operatorname{Cos} L') + \\ + n''(\varrho'' \operatorname{Cos} \alpha'' + R'' \operatorname{Cos} L''),$$
$$0 = n(\varrho \operatorname{Sin} \alpha + R \operatorname{Sin} L) - (\varrho' \operatorname{Sin} \alpha' + R' \operatorname{Sin} L') + \\ + n''(\varrho'' \operatorname{Sin} \alpha'' + R'' \operatorname{Sin} L''),$$
$$0 = n\varrho\, tg\, \beta - \varrho'\, tg\, \beta' + n''\varrho''\, tg\, \beta''.$$

Som värdena på n och n'', såsom vi snart skola se, ej kunna direct finnas, är det fördelaktigt att först bestämma ϱ' ur värdena på n och n'' och att sedermera derur bestämma ϱ och ϱ''. Man eliminerar derföre dessa ur æquationerna och erhåller

*) Jfr Theor. Mot. Lib. I Sect. IV Art. 112. Beteckningarna äro i så måtto olika, att hos Gauss n, n' och n'' utmärka triangelareorna, hvilka i den Enckeska methoden betecknas med $[r'r'']$, $[rr'']$, $[rr']$.

$$\left.\begin{aligned}0 = \quad & n R \;(tg\,\beta \operatorname{Sin}(\alpha'' - L\,) - tg\,\beta'' \operatorname{Sin}(\alpha - L\,))\\ - \quad & R' \;(tg\,\beta \operatorname{Sin}(\alpha'' - L') - tg\,\beta'' \operatorname{Sin}(\alpha - L'))\\ + \, & n'' R'' \,(tg\,\beta \operatorname{Sin}(\alpha'' - L'') - tg\,\beta'' \operatorname{Sin}(\alpha - L''))\\ - \quad & \varrho' \,(tg\,\beta \operatorname{Sin}(\alpha'' - \alpha'\,) - tg\,\beta' \operatorname{Sin}(\alpha'' - \alpha)\\ & \qquad + tg\,\beta'' \operatorname{Sin}\alpha' - \alpha)).\end{aligned}\right\} \quad 1$$

Införas de i föregående Art. bestämda vinklarna öfvergår detta till

$$\left.\begin{aligned}\frac{\operatorname{Sin}(\beta' - \beta^0)}{\operatorname{Cos}\beta^0 \operatorname{Cos}\beta'\, tg\, J}\,\varrho' = R' \operatorname{Sin}(L' - K) - n R \operatorname{Sin}(L - K)\\ - n'' R'' \operatorname{Sin}(L'' - K)\end{aligned}\right\} \quad 2$$

För större beqvämlighets skuld beräknar man särskildt

$$a^0 = \frac{\operatorname{Sin}(\beta' - \beta^0)}{tg\, J \operatorname{Cos}\beta^0}, \quad b = \frac{R \operatorname{Sin}(L - K)}{a^0},$$

$$c = \frac{R' \operatorname{Sin}(L' - K)}{a^0}, \quad d = \frac{R'' \operatorname{Sin}(L'' - K)}{a^0},$$

hvarigenom æquationen öfvergår till:

$$\frac{\varrho'}{\operatorname{Cos}\beta'} = c - bn - dn''. \quad 3$$

Genom att söka värdena på ϱ och ϱ'' ur värdet på ϱ' erhålles:

$$\left.\begin{aligned}\varrho = & \left(\frac{\operatorname{Sin}(\alpha'' - \alpha')}{\operatorname{Sin}(\alpha'' - \alpha)} + \frac{a^0 \operatorname{Sec}\beta'}{\operatorname{Sin}(\alpha'' - \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{Sin}(\alpha'' - L'')}{\operatorname{Sin}(L'' - K)}\right) \cdot \frac{\varrho'}{n}\\ & + R \cdot \frac{\operatorname{Sin}(L'' - L)}{\operatorname{Sin}(\alpha'' - \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{Sin}(\alpha'' - K)}{\operatorname{Sin}(L'' - K)} \cdot \left(\frac{N}{n} - 1\right),\\ \varrho'' = & \left(\frac{\operatorname{Sin}(\alpha' - \alpha)}{\operatorname{Sin}(\alpha'' - \alpha)} - \frac{\alpha^0 \operatorname{Sec}\beta'}{\operatorname{Sin}(\alpha'' - \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{Sin}(\alpha - L)}{\operatorname{Sin}(L - K)}\right) \cdot \frac{\varrho'}{n''}\\ & + R'' \cdot \frac{\operatorname{Sin}(L'' - L)}{\operatorname{Sin}(\alpha'' - \alpha)} \cdot \frac{\operatorname{Sin}(\alpha - K)}{\operatorname{Sin}(L'' - K)} \cdot \left(\frac{N''}{n''} - 1\right).\end{aligned}\right\} \quad 4$$

I dessa æquationer införas följande beteckningar, hvilka särskildt beräknas:

$$f = \frac{\operatorname{Sec}\beta'}{\operatorname{Sin}(\alpha'' - \alpha)}, \quad h = \frac{R R'' \operatorname{Sin}(L'' - L)}{a^0 \operatorname{Sin}(\alpha'' - \alpha)},$$

$$M_1 = \frac{\operatorname{Sin}(\alpha'' - \alpha')}{\operatorname{Sin}(\alpha'' - \alpha)} + f\, \frac{R'' \operatorname{Sin}(\alpha'' - L'')}{d},$$

$$M_1'' = \frac{\mathrm{Sin}\,(\alpha' - \alpha)}{\mathrm{Sin}\,(\alpha'' - \alpha)} - f\,\frac{R\,\mathrm{Sin}\,(\alpha - L)}{b},$$

$$M_2 = h\,\frac{\mathrm{Sin}\,(\alpha'' - K)}{d},\; M_2'' = h \cdot \frac{\mathrm{Sin}\,(\alpha - K)}{b},$$

hvarigenom erhålles:

$$\left.\begin{aligned} \varrho &= M_1\,\frac{\varrho'}{n} + M_2\left(\frac{N}{n} - 1\right) \\ \varrho'' &= M_1''\,\frac{\varrho'}{n''} + M_2''\left(\frac{N''}{n''} - 1\right) \end{aligned}\right\} \qquad 5$$

8.

Det i den andra Keplerska lagen uttalade vilkoret, att de tre planetorterna skola tillhöra en och samma ellips, i hvars focus solen står, införes, när banans halfparameter betecknas med p, excentriciteten med e, perihelii afstånd från noden med ω och breddens argumenter med u, u', u'', genom æquationerna

$$\frac{p}{r} = 1 + e\,\mathrm{Cos}\,(u - \omega)$$

$$\frac{p}{r'} = 1 + e\,\mathrm{Cos}\,(u' - \omega)$$

$$\frac{p}{r''} = 1 + e\,\mathrm{Cos}\,(u'' - \omega)\ ^{*)}$$

ur hvilka man genom enkla transformationer finner

$$p = \frac{[r\,r'] \cdot [r'\,r'']}{n'' - 1 + n} \cdot \frac{1}{2\,r r' r''\,\mathrm{Cos}\,(u'' - u')\,\mathrm{Cos}\,(u' - u)\,\mathrm{Cos}\,(u'' - u)}$$

För att uttrycka n och n'' i function af tiderna måste man, såsom redan är antydt, taga sin tillflygt till successiva approximationer; man utvecklar dem derföre i convergenta serier, af hvilka så småningom allt flera termer medtagas, men redan vid första approximationen måste så många medtagas, att de fel man begår genom att utesluta de öfriga bli allt mindre ju mindre mellantiderna äro.

---

*) Theor. Mot. Lib. I Sect I Art. 8 æqu. II, emedan sanna anomalien v är lika med $u - \omega$.

Genom att uttrycka alla de i æquationen 1 Art. 7 för de båda yttersta observationerna gällande quantiteter genom de motsvarande, för den mellersta observationen gällande, uti serier, som fortgå efter stigande potenser af τ och τ'', finner man att æquationen för ϱ' blir af formen

$$\varrho' = \frac{0^0}{3^0} + \frac{1^0}{3^0} + \frac{2^0}{3^0} + \frac{3^0}{3^0} + \ldots\ldots,$$

hvaraf synes att i täljarne minst termerna af tredje ordningen måste medtagas. Som emellertid coefficienterna till n och n'' bli af minst första ordningen, behöfver i utvecklingen af n och n'' blott termerna af till och med andra ordningen medtagas.

Lägger man i banans plan ett rätvinkligt coordinatsystem och nodlinien tages till x axel samt triangelareorna uttryckas genom coordinaterna för sina spetsar, så erhålles

$$n'' = \frac{y'\,x - x'\,y}{y''x - x''\,y},$$

$$n = \frac{y''\,x' - x''\,y'}{y''x - x''y}.$$

Genom att uttrycka x, x'' och y', y', genom x', y' samt med tillhjelp af Newtonska attractionslagen och tredje Keplerska lagen fås följande utvecklingar:

$$n = \frac{\tau''}{\tau'}\left(1 + \frac{1}{6}\,\frac{\tau\,(\tau' + \tau'')}{r'^{\,3}} - \frac{1}{4}\,\frac{\tau'\,(\tau^2 + \tau\tau'' - \tau''^2)}{r'^{\,4}}\cdot\frac{dr'}{d\vartheta} + \ldots\right)$$

$$n = \frac{\tau}{\tau'}\left(1 + \frac{1}{6}\,\frac{\tau''\,(\tau' + \tau)}{r'^3} + \frac{1}{4}\,\frac{\tau''\,(\tau''^2 + \tau\tau'' - \tau^2)}{r'^{\,4}}\cdot\frac{dr'}{d\vartheta} + \ldots\right)$$

$$n + n'' = 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\tau\tau''}{r'^{\,3}} - \frac{1}{2}\,\frac{\tau\tau''\,(\tau - \tau'')}{r'^4}\,\frac{dr'}{d\vartheta} + \ldots\ldots$$

$$\frac{n''}{n} = \frac{\tau''}{\tau}\left(1 + \frac{1}{6}\,\frac{(\tau - \tau'')\,\tau'}{r'^4} + \ldots\ldots\right)$$

Insättas dessa värden i æqu. 3 Art. 7 samt man i utvecklingarna för n och n'' blott medtager termerna af till och med andra, och i sjelfva æquationen blott termerna af till och med tredje ordningen, i öfverensstämmelse med de grundsatser för uppgörandet af första hypothesen, hvilka ofvan blifvit framställda, så visar det sig vid jemförelsen mellan den ursprung-

liga æquationen och den sålunda transformerade, att man egentligen infört värdena

$$\frac{n''}{n} = \frac{\tau''}{\tau} \text{ och } n + n'' = 1 + \frac{\tau\tau''}{2\,r'^3}.$$

Man inför derföre såsom första hypothes

$$P = \frac{n''}{n} = \frac{\tau''}{\tau}, \quad Q = (n + n'' - 1)\, 2\, r'^3 = \tau\tau''.$$

Härigenom öfvergår æqu. 3 Art. 7 till

$$\frac{\varrho'}{\operatorname{Cos}\beta'} = c - \frac{b + Pd}{1 + P}\left(1 + \frac{Q}{2\,r'^3}\right),$$

samt om följande beteckningar

$$\frac{b + Pd}{1 + P} = c^0, \quad c - c^0 = k^0, \quad \frac{c^0\,Q}{2} = l^0,$$

användas, till:

$$\frac{\varrho'}{\operatorname{Cos}\beta'} = k^0 - \frac{l^0}{r'^3},$$

Ur triangeln mellan solen, jorden och planeten finner man:

$$r'^2 = R'^2 + 2\,\frac{R'\,\varrho'}{\operatorname{Cos}\beta'}\operatorname{Cos}\delta' + \frac{\varrho'^2}{\operatorname{Cos}^2\beta'}, \text{ eller}$$

$$\frac{\varrho'}{\operatorname{Cos}\beta'} = -R'\operatorname{Cos}\delta' \pm \sqrt{r'^2 - R'^2\operatorname{Sin}^2\delta'}.$$

Genom att eliminera ϱ' ur æqu. 1 och 2 erhålles

$$k^0 - \frac{l^0}{r'^2} = -R'\operatorname{Cos}\delta' \pm \sqrt{r'^2 - R'^2\operatorname{Sin}^2\delta'},$$

hvilken æquation vid hyfsningen blir af 8:de graden. För att förenkla den, införas quantiteterna μ och q, bestämda genom följande æquationer och det vilkor, att μ skall hafva samma tecken som l^0

$$R'\operatorname{Sin}\delta' = \mu\operatorname{Sin}q,$$
$$k^0 + R'\operatorname{Cos}\delta' = \mu\operatorname{Cos}q.$$

Vidare införes en ny hjelpvinkel z', för hvilken man antager

$$r'^4\operatorname{Sin}(z' - q) = l^0\operatorname{Sin}q,$$
$$r'^4\operatorname{Cos}(z' - q) = \mu r'^3 - l^0\operatorname{Cos}q.$$

Man eliminerar nu r'^4 ur dessa båda æquationer och genom ny elimination mellan den sålunda uppkomna och den första, erhålles den från r' fria æquationen

$$\operatorname{Sin}(z - q) = \frac{l^0}{\mu^4 \operatorname{Sin}^3 q} \operatorname{Sin}^4 z,$$

och slutligen om man för korthetens skuld sätter

$$\frac{l^0}{\mu^4 R'^3 \operatorname{Sin}^3 \delta'} = m,$$

$$\operatorname{Sin}(z - q) = m \operatorname{Sin}^4 z.$$

I det fall, som här är i fråga, nemligen att bestämma elementer för en asteroid, måste, så framt de observationer, från hvilka man utgår, verkligen tillhöra en sådan, denna æquation ge en enda reel och positiv rot mindre än δ'. Tillika måste den nära satisfieras af δ'.

Det värde på z, som i beräkningen skall införas, är intet annat än vinkeln vid planeten i den nyssnämnda triangeln mellan solen, jorden och planeten.

9.

Sedan æquationen med tillhjelp af *regula falsi* blifvit löst, beräknas r' och ϱ' samt n och n'' ur formlerna

$$r' = \frac{R' \operatorname{Sin} \delta'}{\operatorname{Sin} z'}, \quad \frac{\varrho'}{\operatorname{Cos} \beta'} = \frac{R' \operatorname{Sin}(\delta' - z')}{\operatorname{Sin} z'}$$

$$n = \left(1 + \frac{Q}{2 r'^3}\right) \frac{1}{1 + P}, \quad n'' = n P$$

samt ϱ och ϱ'' ur æqu. 5 Art. 8.

Derefter bestämmas de heliocentriska orterna och radii vectores för alla tre observationerna ur formlerna i Theoria Motus Lib. I Sect. II Art. 62, derigenom att man sätter $L = N$ och, såsom i ifrågavarande fall är tydligt, $B = 0$. Härvid måste såsom första prof på räkningens riktighet det nu funna värdet på r' öfverensstämma med det förut funna. Inclinationen och uppstigande nodens längd samt breddens argumenter beräknas ur de båda yttersta heliocentriska orterna med tillhjelp af form-

lerna i Lib. I Sect. IV Art. 110 och Sect. III Art. 78, II, och såsom andra och tredje prof måste de värden, som erhållas ur

$$tg\,\nu' = \mathrm{Sin}\,(\lambda' - \Omega)\; tg\,i\,.$$

$$n = \frac{r'\,r''\,\mathrm{Sin}\,u'' - u')}{rr''\,\mathrm{Sin}\,(u'' - u)},\quad n'' = \frac{rr'\,\mathrm{Sin}\,(u' - u)}{rr''\,\mathrm{Sin}\,(u'' - u)}$$

stämma med de förut funna.

Med tillhjelp af de sålunda funna approximerade värdena corrigeras de data, som blifvit lagda till grund för hypothesen. Först befrias observationstiderna från aberration. Det är nemligen tydligt, att då ljusets hastighet ej är oändligt stor, måste alla himlakroppar synas, ej i den riktning, de verkligen hafva, utan som de haft så lång tid tillbaka, som det behöfves för ljuset att hinna från dem till jorden. Utmärker derföre $\varkappa$ den tid ljuset behöfver för att öfverfara en jordbanradie, så måste man från observationstiderna subtrahera $\varkappa\,\varrho^{n}\,\mathrm{Sec}\,\beta^{n}$ för att erhålla de sanna observationstiderna. Härpå kommer förbättringen af värdena på triangelareorna. Man antager:

$$y\,[rr'] = \tau''\sqrt{p},\quad y'\,[rr''] = \tau'\sqrt{p}\quad y\,[r'r''] = \tau\sqrt{p},$$

hvarest således y, y', y'' uttrycka förhållandet mellan triangelareorna och de motsvarande elliptiska sectorerna.

Medelst hufvudæquationerna i planettheorien finner man:

$$\tau'\sqrt{p} = \frac{E'' - E\,\mathrm{Sin}\,(E'' - E)}{\mathrm{Sin}^3\,\tfrac{1}{2}\,(E'' - E)}\left(\frac{\mathrm{Sin}\,\tfrac{1}{2}\,(u'' - u)\sqrt{rr''}}{\sqrt{p}}\right)^3\sqrt{p}$$
$$+\, rr''\,\mathrm{Sin}\,(\omega'' - u)$$

och om y' införes,

$$\tau' = \frac{E'' - E - \mathrm{Sin}(E'' - E)}{\mathrm{Sin}^3\,\tfrac{1}{2}\,(E'' - E)}\left(\frac{\tau'}{2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,(u'' - u)\sqrt{rr''}}\right)^3\frac{1}{y'^3} + \frac{\tau'}{y'}.$$

Utvecklar man den förste factorn i serie, så erhålles

$$\tau' = \frac{\tau'}{y'} + (\tfrac{4}{3} + \tfrac{8}{5}\,\mathrm{Sin}^2\,\tfrac{1}{4}\,(E'' - E)$$

$$+\, \tfrac{6}{3}\tfrac{4}{5}\,\mathrm{Sin}^4\,\tfrac{1}{4}\,(E'' - E) + \ldots.)\left(\frac{\tau'}{2\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}\,(u'' - u)\sqrt{rr''}}\right)^3\frac{1}{y'^3}$$

och dessutom finnes

$$\mathrm{Sin}^2 \tfrac{1}{4}(E''-E) = \frac{\tau'}{y'^2}\left(\frac{1}{2\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(u''-u)\sqrt{rr''}}\right)^2$$
$$-\frac{r+r''-2\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(u''-u)\sqrt{rr''}}{4\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(u''-u)\sqrt{rr''}}.$$

Införas följande hjelpvinklar,

$$tg\,\psi' = \sqrt{\frac{r''}{r}} \text{ samt}$$
$$\mathrm{Cos}\,\gamma' = \mathrm{Sin}\,2\,\psi'\,\mathrm{Cos}\,\tfrac{1}{2}(u''-u)$$

så erhålles

$$\tau' = \frac{\tau'}{y'} + (\tfrac{4}{3} + \tfrac{8}{5}\,\mathrm{Sin}^2 \tfrac{1}{4}(E''-E)$$
$$+ \tfrac{6}{3}\tfrac{4}{5}\,\mathrm{Sin}^4 \tfrac{1}{4}(E''-E) + \ldots)\left(\frac{\tau'}{(r+r'')\,\mathrm{Cos}\,\gamma'}\right)^3 \frac{1}{y'^3}$$

och

$$\mathrm{Sin}^2 \tfrac{1}{4}(E''-E) = \frac{\tau'^2}{y'^2}\left(\frac{1}{(r+r'')\,\mathrm{Cos}\,\gamma'}\right)^3 - \frac{\mathrm{Sin}^2 \frac{1}{2}\gamma'}{\mathrm{Cos}\,\gamma'}$$

och om man sätter

$$\left(\frac{\eta'}{k}\right)^2 = \frac{(t''-t)^2}{r'^3}\,\mathrm{Cos}^6\,\psi' = \frac{(t''-t)^2}{(rr'')^3} \text{ så erhålles}$$

$$1 = \frac{1}{y'} + (\tfrac{4}{3} + \tfrac{8}{5}\,\mathrm{Sin}^2 \tfrac{1}{4}(E''-E) +$$
$$+ \tfrac{6}{3}\tfrac{4}{5}\,\mathrm{Sin}^4 \tfrac{1}{4}(E''-E) + \ldots)\,\frac{\eta'^2}{\mathrm{Cos}\,\gamma'^3}\cdot\frac{1}{y'^3}$$

samt $\mathrm{Sin}\,\frac{1}{4}(E''-E) = \dfrac{\eta'^2}{y'^2\,\mathrm{Cos}^3\,\gamma'} - \dfrac{\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}\gamma'}{\mathrm{Cos}\,\gamma'}$.

Insättes detta i den förra æquationen, så finner man

$$y' = 1 + \left(\frac{4}{3\,\mathrm{Cos}^3\,\gamma'} - \frac{8}{5}\,\frac{\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}\gamma'}{\mathrm{Cos}^4\,\gamma'} + \frac{6.4}{5}\,\frac{\mathrm{Sin}^4\frac{1}{2}\gamma'}{\mathrm{Cos}^5\,\gamma'}\right)\frac{\eta'^2}{y'^2}$$
$$+\left(\frac{8}{5\,\mathrm{Cos}^6\,\gamma'} - \tfrac{1}{3}\tfrac{1.8}{5}\,\frac{\mathrm{Sin}^2\frac{1}{2}\gamma'}{\mathrm{Cos}^3\,\gamma'}\right)\frac{\eta'^4}{y'^4} + \ldots\ldots$$

kallas coefficienterna för A, B, ... och man i stället för η'^2 skrifver z' så fås

$$y' = 1 + Az'\,y' - 2 + Bz'^2\,y - 4 + \ldots\ldots$$

Men enligt Mac Laurinska theoremet är

$$y' = (y')_0 + \left(\frac{dy'}{dz'}\right)_0 z' + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2 y'}{dz'^2}\right)_0 z'^2 + \ldots\ldots$$

Bestämmer man ur dessa båda æquationer, enligt methoden för obestämda coefficienter, quantiteterna $(y')_0$, $\left(\frac{dy'}{dz'}\right)_0$ och $\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 y'}{dz'^2}\right)_0$ så erhålles

$$y' = 1 + Az' - (2A^2 - B)z'^2 + \ldots\ldots$$

På denna æquation tillämpas den logarithmiska serien *), hvilken här är gällande, emedan y' är blott föga större än 1. Härigenom öfvergår den till:

$$ly' = A\eta'^2 - (\tfrac{5}{2}A^2 - B)\eta'^4 + \ldots\ldots$$

och när coefficienternas värden insättas, till:

$$ly' = \tfrac{4}{3}\eta'^2 + \tfrac{32}{5}(\mathrm{Sin}^2 \tfrac{1}{2}\gamma' - \tfrac{4}{9}\eta'^2)\eta'^2 + \ldots\ldots$$

I denna æquation har jag utelemnat alla termer af högre ordning än den fjerde, ett förfarande som är fullkomligen berättigadt, emedan dessa termer först vid en mellantid af öfver ett år vålla en ändring af en enhet i sista decimalen för $\log y'$, när man, såsom lämpligast är, verkställer beräkningen med sexsiffriga logarithmer.

Uttryckes y' genom Briggska logarithmer, erhålles

$$\log y' = a'\left(\frac{\eta'}{k}\right)^2 \qquad \text{2 Ordn.}$$

$$+ a''\left(\frac{\eta'}{k}\right)^2 - b''\left(\frac{\eta'}{k}\right)^4 \qquad \text{4 Ordn.}$$

Coefficienterna a', a'' och b'' bestämmas ur:

$\log a' = 3{,}233886$, $\quad \log a'' = 3{,}614097 + \log(1 - \mathrm{Cos}\,\gamma')$
$\log b'' = 0{,}034108$

y och y'' bestämmas ur samma æquation om man i stället för η' inför $\eta^2 = \frac{\tau^2}{(r' + r'')^3}$ och $\eta''^2 = \frac{\tau''^2}{(r + r')^3}$ och i stället för γ' de motsvarande vinklarna γ och γ''. För att undvika summe-

*) Schlömilch, Compendium der höheren Analysis p. 132 æqu. 3

ringarna af radii vectores, införes det förutnämnda ψ' och de medelst följande æquationer bestämda hjelpvinklarna ψ och ψ

$tg\,\psi''=\sqrt{\frac{r'}{r}}$, $tg\,\psi=\sqrt{\frac{r''}{r'}}$. Härigenom bli de æquationer, ur hvilka man bestämmer $\left(\frac{\eta}{k}\right)^2$, $\left(\frac{\eta'}{k}\right)^2$ och $\left(\frac{\eta''}{k}\right)^2$

$$\left(\frac{\eta''}{k}\right)^2=\frac{(t'-t)^2}{r^3}\,\mathrm{Cos}^6\,\psi'',\quad \left(\frac{\eta'}{k}\right)^2=\frac{(t''-t)^2}{r^3}\,\mathrm{Cos}^6\,\psi',$$

$$\left(\frac{\eta}{k}\right)^2=\frac{(t''-t')^2}{r'^3}\,\mathrm{Cos}^6\,\psi.$$

De stränga värden på P och Q, som nu skola införas bestämmas på följande sätt. Söker man ur de æquationer, hvari betydelsen af y y' och y'' först finnes framställd, n och n'' och dividerar dem med hvarandra, så fås

$$P=\frac{\tau''}{\tau}\cdot\frac{y}{y''}$$

Genom att ur samma æquationer insätta värdena på $[rr']$ och $[r'r'']$ i æqu. för p i Art. 8 och lösa i anseende till $(n+n''-1)2r'^3$ finner man

$$Q=\frac{\tau\tau''}{yy''}\cdot\frac{r'^2}{rr''\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(u''-u')\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(u''-u)\,\mathrm{Cos}\,\frac{1}{2}(u'-u)}.$$

Andra approximationen verkställes nu på det sättet, att man medelst ofvanstående formler beräknar y och y'', blott medtagande termen af andra ordningen, samt, med tillhjelp af dem, nya värden på P och Q. Härefter beräknar man ånyo, i enlighet med Artt. 8 och 9, de tre radii vectores och distantiæ curtatæ, de heliocentriska orterna, samt uppstigande nodens längd och inclinationen, corrigerar ånyo tiderna för möjligen återstående aberration och söker åter värdena på P och Q, hvarvid i y och y'' termerna af fjerde ordningen äfven medtagas. Stämma de sålunda funna värdena på P och Q med dem, som man erhöll vid slutet af första hypothesen, så är approximationen tillräckligt långt drifven. Annars förnyas samma förfarande till dess P och Q ej förändra sina värden.

10.

Härefter sker den slutliga beräkningen af de öfriga elementerna. Man bestämmer ψ' samt ur æquationerna

$$\begin{aligned} \operatorname{Sin}\gamma' \operatorname{Cos} G' &= \operatorname{Sin} \tfrac{1}{2}(u''-u) \\ \operatorname{Sin}\gamma' \operatorname{Sin} G' &= \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(u''-u) \operatorname{Cos} 2\psi' \\ \operatorname{Cos}\gamma' &= \operatorname{Cos} \tfrac{1}{2}(u''-u) \operatorname{Sin} 2\psi' \end{aligned}$$

γ' och G' samt, såsom förut är visadt, y'. För beqvämlighets skuld begagnar man dock $2 \operatorname{Sin}^2 \frac{1}{2}\gamma'$ i stället för $1 - \operatorname{Cos}\gamma'$ i uttrycket för a''.

För halfparameten har man de tre värdena

$$p = \left(\frac{y'' rr' \operatorname{Sin}(u'-u)}{\tau''}\right)^2 = \left(\frac{y r' r'' \operatorname{Sin}(u''-u')}{\tau}\right)$$

$$= \left(\frac{y' rr'' \operatorname{Sin}(u''-u)}{\tau'}\right)^2,$$

hvari tillika det fjerde profvet innehålles.

Utur de i art. 8 anförda æquationerna mellan halfparametern, radii vectores, breddens argumenter, excentriciteten och perihelii afstånd från noden finner man genom enkla transformationer och införandet af vinkeln G':

$$e \operatorname{Sin}(\omega - \tfrac{1}{2}(u''+u)) = \frac{p}{\operatorname{Cos}\gamma' \sqrt{rr''}} \, tg\, G'$$

$$e \operatorname{Cos}(\omega - \tfrac{1}{2}(u''+u)) = \frac{p}{\operatorname{Cos}\gamma' \sqrt{rr''}} - \operatorname{Sec} \tfrac{1}{2}(u''-u).$$

Medelst dessa formler bestämmas ω och e samt ur det senare, φ, genom den bekanta formeln $e = \operatorname{Sin}\varphi$.

Genom formlerna i Theoria motus Lib. I Sect. I Art. 8 beräknas större axeln, de excentriska anomalierna, sedan man ur värdena på ω och breddens argumenter beräknat de sanna anomalierna, samt medelanomalierna.

Den välbekanta formeln $\mu = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}}$ bestämmer slutligen dagliga medelrörelsen. Såsom sista prof skola de tre värden som man erhåller om man ur hvardera af de trenne medelanomalierna beräknar medelanomalien för en och samma tid, bli lika med hvarandra.

11.

Vid tillämpningen af denna method på beräkningen af Panopeas elementer måste jag göra den förändringen af formlerna i Art. 8 att observationsortens afstånd från jordens medelpunkt sattes lika med 0, emedan normalorterna äro fria från parallax. Härigenom öfvergingo dessa formler till

$$L = 180^0 + \odot^0 - (\text{Præcession} + \text{Nutation}) - \frac{\sigma^0}{tg\,\beta^0} \text{Sin}(\alpha^0 - \odot^0) \text{ och}$$

$$\log R = \log R^0 - M^0 \frac{\sigma^0}{tg\,\beta^0} \text{Cos}(\alpha^0 - \odot^0)$$

Observationernas befriande från aberration bortföll likaledes.

För att redan vid uppgörandet af första hypothesen hinna till nära riktiga värden, begagnade jag Försters elementer för att beräkna y och y''. En följd häraf blef att sedan andra hypothesen blifvit beräknad, befans approximationen tillräckligt långt drifven.

Räkningen fördes nu till slut, profven stämde på ett tillfredsställande sätt, och jag erhöll följande elementsystem.

$$\begin{aligned}
\text{Epoch} &= 1861 \text{ Juni } 0{,}0 \\
M &= 310^0 46' 44'',55, \\
\pi &= 299\ 47\ 31,\ 6, \\
\Omega &= 48\ 16\ 27,\ 8, \\
i &= 11\ 31\ 56,\ 5, \\
\varphi &= 11\ 14\ 45,\ 0, \\
\mu &= 832''3233.
\end{aligned}$$

(π, Ω, i:) Epochens medelæquinoctium

För att jemföra det med observationerna, härledde jag, liksom i Art. 3 följande transformerade elementer,

$$\begin{aligned}
\text{Epoch} &= 1861 \text{ Juni } 0{,}0 \\
M &= 310^0 46' 44'',55, \\
\omega &= 251\ 31\ \ 3,\ 8\ + 2'',0112\ (t' - 1861 \text{ Juni } 0{,}0) \\
\Omega &= 48\ 16\ 27,\ 8\ + 48'',2451\ (t' - 1861 \text{ Juni } 0{,}0) \\
i &= 11\ 31\ 56,\ 5\ + 0'',27695\ (t' - 1861 \text{ Juni } 0{,}0) \\
\varphi &= 11\ 14\ 45,\ 0 \\
\mu &= 832'',3233
\end{aligned}$$

och beräknade dermed följande ephemerid.

Berl. Med.-tid	α	δ	log. Δ
Maj 4,0	221°21′32″,31	— 14°16′23″,32	0,14887
5,0	221 5 29, 84	— 14 17 13, 26	0,14825
6,0	220 49 25, 36	— 14 18 3, 68	0,14770
7,0	220 33 20, 11	— 14 18 54, 48	0,14723
8,0	220 17 15, 28	— 14 19 46, 40	0,14684
9,0	220 1 12, 14	— 14 20 39, 23	0,14654
10,0	219 45 11, 95	— 14 21 33, 21	0,14632
11,0	219 29 15, 94	— 14 22 28, 54	0,14617
12,0	219 13 25, 49	— 14 23 25, 48	0,14611
13,0	218 57 41, 76	— 14 24 24, 19	0,14613
14,0	218 42 5, 92	— 14 25 24, 87	0,14624
15,0	218 26 39, 07	— 14 26 27, 69	0,14643
16,0	218 11 22, 47	— 14 27 32, 85	0,14670
17,0	217 56 17, 13	— 14 28 40, 53	0,14705
18,0	217 41 24, 14	— 14 29 50, 93	0,14748
19,0	217 26 44, 47	— 14 31 4, 20	0,14797
20,0	217 12 19, 17	— 14 32 20, 63	0,14854
21,0	216 58 9, 18	— 14 33 40, 27	0,14917
22,0	216 44 15, 43	— 14 35 3, 40	0,14989
23,0	216 30 38, 68	— 14 36 29, 90	0,15069
24,0	216 17 19, 89	— 14 38 0, 13	0,15155
25,0	216 4 19, 79	— 14 39 34, 16	0,15246
26,0	215 51 39, 15	— 14 41 12, 27	0,15346
27,0	215 39 18, 66	— 14 42 54, 48	0,15453
28,0	215 27 19, 15	— 14 44 40, 98	0,15566
29,0	215 15 41, 25	— 14 46 31, 89	0,15684
30,0	215 4 25, 67	— 14 48 27, 46	0,15808
31,0	214 53 32, 95	— 14 50 27, 77	0,15939
Juni 1,0	214 43 3, 84	— 14 52 32, 96	0.16077
2,0	214 32 58, 83	— 14 54 43, 14	0,16218
3,0	214 23 18, 48	— 14 56 58, 48	0,16366
4,0	214 14 3, 24	— 14 59 19, 09	0,16520
5,0	214 5 13, 65	— 15 1 45, 07	0,16678
6,0	213 56 50, 13	— 15 4 16, 47	0,16840
7,0	213 48 53, 14	— 15 6 53, 50	0,17007
8,0	213 41 22, 98	— 15 9 36, 20	0,17179
9,0	213 34 20, 06	— 15 12 24, 65	0,17356
10,0	213 27 44, 57	— 15 15 18, 88	0,17536
11,0	213 21 36, 99	— 15 18 19, 06	0,17720
12,0	213 15 57, 41	— 15 21 25, 22	0,17910
13,0	213 10 45, 99	— 15 24 37, 35	0,18102
14,0	213 6 2, 88	— 15 27 55, 51	0,18296
15,0	213 1 47, 89	— 15 31 19, 68	0,18495

När observationerna på förut nämndt sätt jemfördes med denna ephemerid fann jag följande skillnader mellan beräkning och observation:

1) *För Observationerna i Berlin och Bilk.*

		$d\alpha$	$d\delta$
Maj	15	$-7'',56$	$-0'',63$
	17	$+2'',74$	$+0'',71$
	26	$-2'',33$	$+1'',17$
Juni	5	$+1'',39$	$+2'',76$
	12	$+7'',91$	$+10'',64$
	13	$-4'',23$	$-3'',05.$

2) *För Observationerna i Fontenay.*

Maj	5	$+2',8$	$+2',4$
	10	$+51'',$	$-11''$
	11	$-6''$	$-0',1$
	18	$-3''4,$	$+25''.$

Af denna jemförelse visar sig å ena sidan att observationerna i Berlin och Bilk betydligt närmare framställas genom mina elementer än genom Försters, och å andra sidan att uteslutandet af observationerna i Fontenay var fullkomligen berättigadt.

Att en ny beräkning ur ofvan anförda observationer vore af intet gagn, åtminstone innan jemförelsestjernorna blifvit ånyo bestämda, är en åsigt, som jag tror mig kunna uttala.

I hvad mån mina elementer öfverensstämma med de sanna visar sig först vid nästa opposition; kan planeten med tillhjelp af dem återfinnas, är ändamålet för mitt arbete uppnådt.

Rättelser:

Sid. 15 efter 4 rad. o. f. införes: när de heliocentriska orterna betecknas med $\lambda\ \lambda'\ \lambda''$ och $\nu\ \nu'\ \nu''$.

Sid. 16 rad 11 n.f. står $(rr'')^3$, läs $(r+r'')^3$.

Sid. 16 rad 2 n.f. läs $y' = 1 + Az'y'^{-2} + Bz'y'^{-4} + \ldots.$